Determinant

1 second, 128 megabytes

โปรดศึกษาไฟล์แนบเพื่อข้อมูลเพิ่มเติม

จงเขียนโปรแกรมคำนวณค่า ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของเมทริกซ์จัตุรัส (sqaure matrix) ขนาด $N \times N$

นิยามทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น

- เมทริกซ์ คือ ตารางของจำนวนขนาด $N \times N$ โดยเมทริกซ์ A จะมีสมาชิกทั้งหมด $N \times N$ ตัว เรียกสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ว่า A_{ij}
- ดีเทอร์มิแนนต์ คือ ค่าจำนวนจริงที่แทนสมบัติของเมทริกซ์ใด ๆ โดยจะนิยามว่า ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A คือ $\det(A)$ หรือ $|A|$
- การคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2:

$$\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = ad - bc$$

- การคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

การขยายด้วยโคแฟกเตอร์ (กำหนดขยายเฉพาะแถวแรก)

ให้ $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. สำหรับดัชนี (i, j) Minor M_{ij} คือเมทริกซ์ขนาด $(n-1) \times (n-1)$ ที่ได้จากการลบแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออกหนึ่งแถวหนึ่งหลัก แล้วจัดเรียงสมาชิกที่เหลือในลำดับเดิม

$$M_{ij} \;=\; A \text{ โดยตัดแถว } i \text{ และหลัก } j.$$

โดยโคแฟกเตอร์กำหนดเป็น

$$C_{ij} \;=\; (-1)^{\,i+j} \, \det(M_{ij}).$$

สูตรขยายตามแถวแรก เมื่อขยายเฉพาะแถวแรก $(i = 1)$ จะได้

$$\det(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, C_{1j} \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\,1+j}\, a_{1j} \, \det(M_{1j}),$$

ซึ่งลำดับเครื่องหมายของพจน์ตาม $j = 1, 2, \ldots, n$ คือ $+, -, +, -, \ldots$

ขั้นตอนเชิงลำดับสำหรับแถวแรก.

1. สำหรับแต่ละหลัก $j = 1, 2, \dots, n$ สร้างมินอร์ M_{1j} ด้วยการลบแถวที่ 1 และหลักที่ j ของ A
2. คำนวณ $\det(M_{1j})$
3. คูณด้วย $(-1)^{1+j}$ แล้วคูณด้วย a_{1j}
4. รวมผลทั้งหมดตามสูตรด้านบน

วิธีทำสำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3

การขยายด้วยโคแฟกเตอร์สำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad M_{11} = \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}.$$

ดังนั้น

$$\det(A) = +a \det(M_{11}) - b \det(M_{12}) + c \det(M_{13}) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

วิธีทำสำหรับเมทริกซ์ขนาด 4×4

การขยายด้วยโคแฟกเตอร์สำหรับเมทริกซ์ขนาด 4×4 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

นิยาม Minor ของสมาชิกในแถวแรกคือ M_{1j} (ลบแถวที่ 1 และหลักที่ j) แล้ว

$$\det(A) = (+)\, a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + a_{13} \det(M_{13}) - a_{14} \det(M_{14}),$$

โดยแต่ละ M_{1j} เป็นเมทริกซ์ 3×3 เช่น

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad M_{14} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

จากนั้นคำนวณ $\det(M_{1j})$ ทีละตัว แล้วแทนค่าลงในสมการด้านบน

ตัวอย่างสำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Minor ของแถวแรกคือ

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2\,\det(M_{11}) \;-\; 1\,\det(M_{12}) \;+\; 0\,\det(M_{13}) \\ &= 2\,(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0) \;-\; 1\,\big((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 4\big) \;+\; 0 \\ &= 2 \cdot 3 \;-\; \big(-1 - 8\big) \\ &= 6 - (-9) \;=\; 15 \end{aligned}$$

ข้อมูลนำเข้า

มีทั้งหมด $N + 1$ บรรทัด ได้แก่
บรรทัดที่ 1 จำนวนเต็ม N แทนจำนวนแถวของเมทริกซ์ $(2 \leq N \leq 10)$
อีก n บรรทัดต่อมา รับค่าแต่ละค่าของเมทริกซ์ $(-10 \leq A_{ij} \leq 10)$

ข้อมูลส่งออก

ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เป็น **ทศนิยม 2 ตำแหน่ง**

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้าและข้อมูลส่งออก

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า	ตัวอย่างข้อมูลส่งออก
2 1 2 3 4	-2.00
3 2 1 0 -1 3 2 4 0 1	15.00
4 3 4 -1 0 2 -5 9 11 8 3 1 3 0 -2 -1 3	666.00

การให้คะแนน

- **ปัญหาย่อยที่ 1 (20 คะแนน)** $N = 2$
- **ปัญหาย่อยที่ 2 (30 คะแนน)** $N = 3$
- **ปัญหาย่อยที่ 3 (50 คะแนน)** ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม